Analyse 6 - Séries numériques

Introduction

Soit u une suite. On s'intéresse à la suite S définie par :

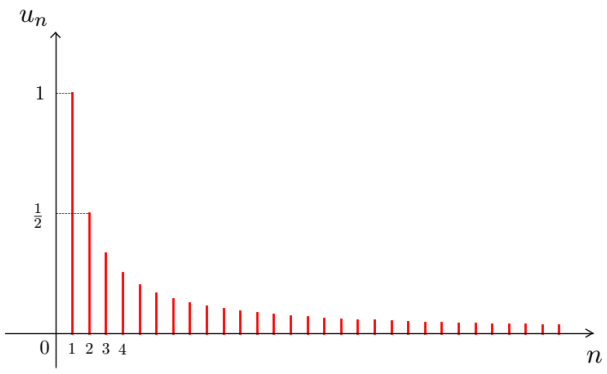
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$$

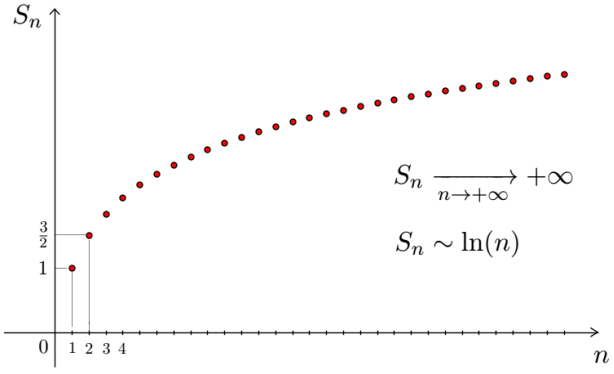
ce qui donne :

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ S_1 &= u_0 + u_1 \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \end{aligned}$$

La question centrale est : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, comment se comporte S_n ? En fait, ça dépend.

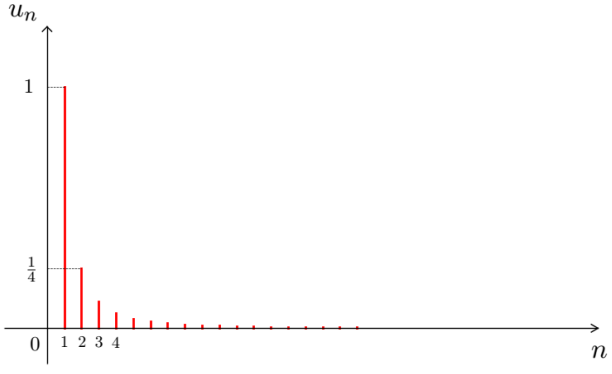
Exemple 1 : $u_n := \dfrac{1}{n}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

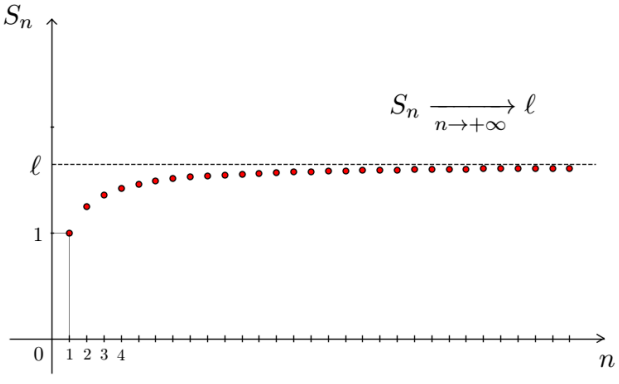




Dans ce cas, on peut montrer (on le fera) que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et même que $S_n \sim \ln(n)$.

Exemple 2 : $u_n := \dfrac{1}{n^2}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.





Dans ce cas, $(S_n)_{n\geqslant 1}$ **converge** vers une limite finie ℓ.

On comprend sur ces exemples que la convergence/divergence de (S_n) va dépendre de la vitesse à laquelle u_n tend vers 0. Un des objectifs majeurs du chapitre est de mieux comprendre et de savoir identifier efficacement ces deux situations (convergence ou divergence).

1 Généralités et premiers exemples

Définition (Série associée à une suite)**.** *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On lui associe la suite S définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n := u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

- *La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée* ***la série de terme général u_n****.*
- *Pour n fixé, S_n s'appelle* ***la somme partielle d'indice n****.*
- *Par raccourci de langage, la série $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est souvent notée $\sum u_n$.*

⚠ "$\sum u_n$" apparaît dans une phrase française pour parler de la série en tant que problème mathématique, mais **jamais dans un calcul**.

Remarques.

1. *$\forall n \geqslant 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. En effet :*

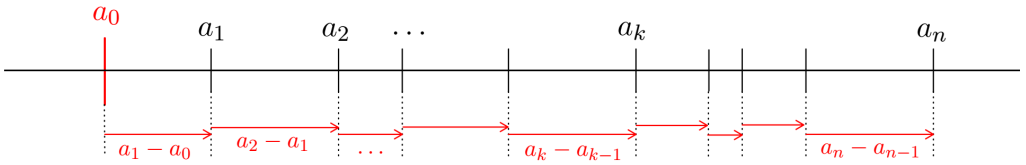
$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

Donc : $\boldsymbol{S_n = S_{n-1} + u_n}$ *(relation de récurrence sur les S_n).*

2. *Par définition, une* ***série*** *est une* ***suite****. Mais réciproquement, toute* ***suite*** *$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être interprétée comme une* ***série*** *:*

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0 \\
a_1 &= a_0 + (a_1 - a_0) \\
a_2 &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\
a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})
\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\boldsymbol{a_n = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})}_{a_n - a_0 \text{ par télesc.}}}$



Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *avec* $\left|\begin{array}{l} u_0 := a_0 \\ \forall k \geqslant 1,\ u_k := a_k - a_{k-1} \end{array}\right.$

Autrement dit, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de terme général u_n. Une suite est donc toujours la série de ses propres accroissements.

Définition. *On reprend les notations de la définition précédente. La série $\sum u_n$ est dite* ***convergente*** *si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas, la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$ (limite finie, donc) s'appelle la* ***somme*** *de la série $\sum u_n$. On note :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la série $\sum u_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Remarque. *Si $\sum u_n$ converge et que $\ell := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne sa somme, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ (fixé), la suite $(T_n)_{n>p}$ définie par*

$$T_n := \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

est également convergente. En effet :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k = S_n - \underbrace{S_p}_{constant} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - S_p$$

On écrit alors :

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} u_k := \ell - S_p$$

de façon à avoir la "relation de Chasles" : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} u_k$.

Théorème. ***Si*** *$\sum u_n$ converge,* ***alors*** $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. Supposons que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (limite finie). On a :

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$$

□

Autre formulation de ce théorème. ***Si*** *u_n ne tend pas vers 0,* ***alors*** *$\sum u_n$ diverge.*

On dit alors que $\sum u_n$ diverge **grossièrement**.

⚠ La réciproque est fausse en général. Autrement dit, ce n'est pas parce que u_n tend vers 0 que $\sum u_n$ converge forcément. Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n}$, u_n tend vers 0 mais $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ et tend vers $+\infty$.

Théorème/définition (Restes d'une série convergente)**.** *Soit $\sum u_n$ une série* ***convergente****, de somme ℓ.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle d'indice n.
Le ***reste*** *d'indice $n \in \mathbb{N}$ de cette série est défini par $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= S_n + R_n \\ &= \underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{S_n} + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots}_{R_n} \end{aligned}$$

On a alors $\boldsymbol{R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

Démonstration. Montrons que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par définition, on a

$$R_n = \ell - S_n$$

et donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$. □

Propriétés (Opérations sur les séries)**.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.*

1. ***Si*** *$\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent,* ***alors*** *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) \;=\; \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration. On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + \mu v_k) \;=\; \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$. □

2. ***Si*** *$\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge,* ***alors*** *$\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

"convergente + divergente = divergente"

Démonstration. Notons $w_n := u_n + v_n$ de sorte que $v_n = w_n - u_n$. On peut alors raisonner par l'absurde : si $\sum w_n$ converge, alors par combinaison linéaire, $\sum v_n$ converge, ce qui est faux ! □

Théorème (Convergence/divergence des séries géométriques)**.**
Soit $q \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence

$$\Big(\sum q^n \;\; \textit{converge}\Big) \iff (|q| < 1)$$

et dans ce cas où $|q| < 1$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme partant de p vaut :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} q^n \;=\; \frac{q^p}{1-q} \;=\; \frac{\textit{1er terme écrit}}{1 - (\textit{la raison})}$$

Démonstration.

- Si $|q| \geqslant 1$, alors q^n ne tend même pas vers 0, donc la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.
- Si $|q| < 1$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{q^p - 0}{1-q} \quad \text{car} \quad q^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

Théorème (Convergence des séries exponentielles)**.**
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Démonstration.

- Commençons par le cas réel. Si l'on fixe $x \in \mathbb{R}$, on reconnaît que la somme partielle :

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

est le polynôme de Taylor (évalué en x) à l'ordre n en 0 de la fonction exponentielle. Il s'agit donc de montrer que cette quantité converge vers e^x lorsque $n \to +\infty$ (x est fixé dans ce raisonnement). Pour cela, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1} \qquad \text{où} \;\; M_{n+1} := \sup_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

à la fonction $f = \exp$ en $a = 0$. Toutes les dérivées n-ièmes $f^{(n)}$ valent exp, donc

$$M_{n+1} = \sup_{t\in[0,x]} |e^t| = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{et donc} \qquad M_{n+1} \leqslant e^{|x|}.$$

On obtient alors :

$$|e^x - T_n(x)| \leqslant \frac{e^{|x|}\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cette quantité tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ car $|x|^{n+1}$ est négligeable devant $(n+1)!$. D'où : $T_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.

Ceci signifie très exactement que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, et que sa somme vaut e^x.

- Si l'on fixe $z \in \mathbb{C}$, on peut faire le même raisonnement sur la fonction (à valeurs complexes) :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz} \end{array}$$

Elle vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(t) = z^n e^{tz}$, donc son polynôme de Taylor en 0 à l'ordre n est :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} X^k$$

et donc en particulier

$$\begin{cases} T_n(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} & \text{(la somme qui nous intéresse)} \\ \\ f(1) = e^z & \text{(le résultat qui nous intéresse)} \end{cases}$$

Or :

$$\sup_{t\in[0,1]} |f^{(n+1)}(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |z^{n+1}e^{tz}| \leqslant |z|^{n+1}e^{|z|} \qquad \Big(\text{l'inég. } |e^{tz}| \leqslant e^{|tz|} \leqslant e^{|z|} \text{ est à méditer}\Big)$$

Donc l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f en $a = 0$ et $x = 1$ à l'ordre n donne :

$$|f(1) - T_n(1)| \leqslant \frac{|z|^{n+1}e^{|z|}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

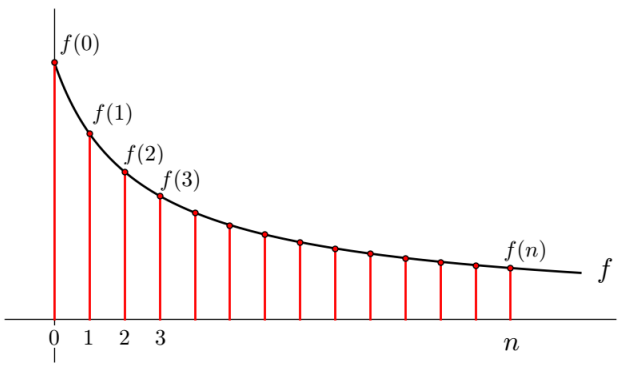
□

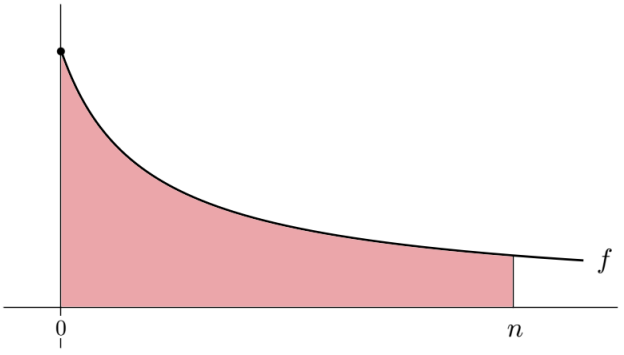
Cf exo 1

2 Technique de comparaison série-intégrale

Imaginons que l'on veuille étudier une série du type $\sum f(n)$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et monotone (mettons décroissante).

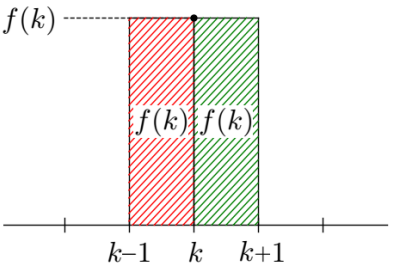
Idée géométrique : $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$ est proche de $\displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$.

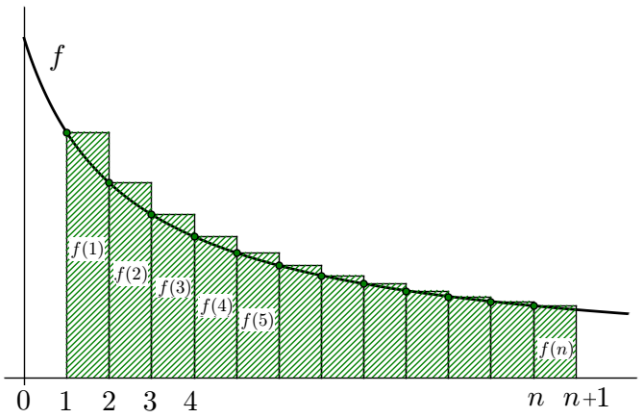


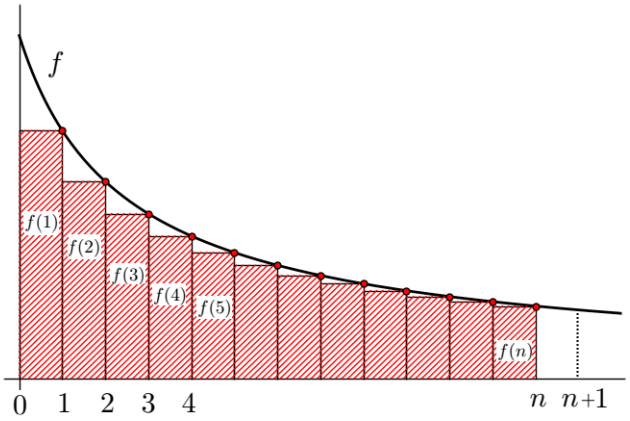


Un premier lien simple peut être fait :

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t = \int_{k}^{k+1} f(k)\mathrm{d}t \quad \leftarrow \left(\begin{array}{c} \text{constante } f(k) \text{ intégrée sur} \\ \text{un intervalle de longueur 1} \end{array} \right)$$







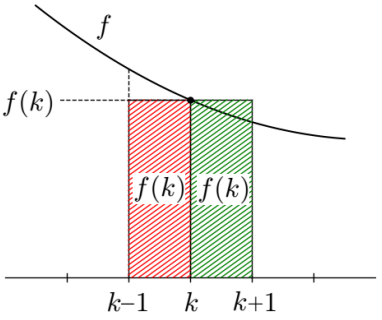
On lit sur le dessin :

$$\int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n+1}} \boldsymbol{f(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{t} \leqslant \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f(k)} \leqslant \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f(t)}\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

Démonstration. (♥ à savoir faire et savoir adapter à diverses situations)
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a par décroissance de f :

- $\forall t \in [k, k+1]$, $f(t) \leqslant f(k)$, donc :

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{k}^{k+1} f(k)\mathrm{d}t = f(k)$$



- $\forall t \in [k-1, k]$, $f(k) \leqslant f(t)$, donc :

$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} f(k)\mathrm{d}t}_{=f(k)} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

D'où :

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

On somme sur $k \in [\![1, n]\!]$ ces inégalités :

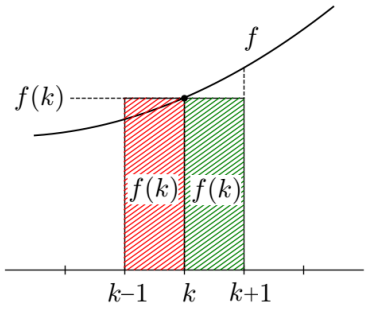
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t}_{\int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \cdots + \int_n^{n+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t}_{\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \cdots + \int_{n-1}^{n}}$$

ce qui donne, par la relation de Chasles :

$$\int_{1}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_{0}^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

□

Remarque. *Lorsque f est croissante, on a :*



$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)dt$$

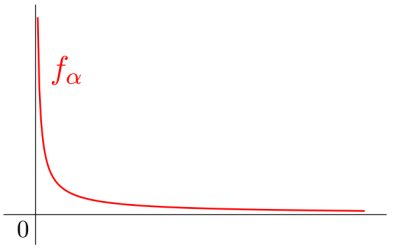
Application aux séries de Riemann

Théorème (Convergence/divergence des séries de Riemann)**.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ ("série de Riemann") converge ***si et seulement si $\alpha > 1$****.*

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Supposons désormais que $\alpha > 0$.
On peut appliquer la technique de comparaison série-intégrale à la fonction :

$$f_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^\alpha} \end{array} \right.$$



qui est continue et décroissante. f_α n'étant pas définie en 0, il est impossible de considérer l'intégrale $\int_0^1 f$, donc le plus petit entier k pour lequel on peut écrire

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$

est $k = 2$. La comparaison série-intégrale donne donc pour tout $n \geqslant 2$ l'encadrement :

$$\underbrace{\int_{\mathbf{2}}^{\boldsymbol{n+1}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t^\alpha}}}_{=:\boldsymbol{A_n(\alpha)}} \leqslant \underbrace{\sum_{\boldsymbol{k=2}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^\alpha}}}_{=:\boldsymbol{S_n(\alpha)}} \leqslant \underbrace{\int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t^\alpha}}}_{=:\boldsymbol{B_n(\alpha)}} \qquad (*)$$

Une primitive de $\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}\right)$ est : $\left| \begin{array}{ll} t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ t \mapsto \ln(t) & \text{si } \alpha = 1 \end{array} \right.$

▶ **Pour $\alpha < 1$:**

$$A_n(\alpha) = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad (\text{car } 1-\alpha > 0)$$

Donc par minoration, $S_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

▶ **Pour $\alpha = 1$:**

$$A_n(\alpha) = [\ln(t)]_2^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc par minoration, $S_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

▶ **Pour $\alpha > 1$:**

$$B_n(\alpha) = \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^{n} = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \leftarrow \textbf{constante}$$

Les sommes partielles $S_n(\alpha)$ sont donc majorées. De plus, elles sont croissantes. Donc elles **convergent**.

□

Remarques.

1. *Pour $\alpha \leqslant 1$ (cas où $S_n(\alpha) \to +\infty$), l'encadrement $(*)$ permet d'obtenir un équivalent de $S_n(\alpha)$ lorsque $n \to +\infty$ car :*

$$A_n(\alpha) \sim B_n(\alpha) \sim \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{1-\alpha}\, n^{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \end{array} \right.$$

On retrouve le célèbre équivalent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ annoncé en introduction de ce cours.

2. *Pour $\alpha > 1$ (cas de convergence), la méthode ne donne pas la valeur de la somme*

$$\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad (\text{"zeta" de } \alpha)$$

mais simplement un encadrement (pas très bon) de cette valeur en passant à la limite $n \to +\infty$ dans $(*)$. Les nombres $\zeta(\alpha)$ sont en fait très difficiles à calculer, et seule une minorité d'entre eux est connue des mathématiciens. Pour la culture, une valeur connue (hors programme) est :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. *$\alpha = 1$ est la valeur de basculement entre convergence et divergence.*

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \qquad\qquad \sum \frac{1}{n^{1,00001}} \text{ converge}$$

3 Théorèmes de comparaison (et de comparaison asymptotique) sur les séries à termes positifs

Supposons que u est une suite de réels positifs. On rappelle que les sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$ vérifient $S_n = S_{n-1} + u_n$, donc

$$\forall n \geqslant 1\,,\ S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$$

Conséquence : si les u_n sont positifs, les sommes partielles S_n sont croissantes.

De là :

- soit elles sont majorées, et alors elles convergent (et donc la série $\sum u_n$ est convergente) ;
- soit elles ne le sont pas, et alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Dans ce cas, on note :

$$\text{" } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \text{ "}$$

Théorèmes (de comparaison)**.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* ***à termes positifs****.*

1. ***Si*** $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right.$ ***alors*** $\sum u_n$ *converge.*

2. ***Si*** $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant v_n \\ \sum v_n \text{ diverge} \end{array} \right.$ ***alors*** $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u_k \leqslant v_k$, donc en sommant ces inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \quad \leftarrow \text{ constante}$$

   Les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ sont donc majorées et croissantes (série à termes positifs), donc elles convergent lorsque $n \to +\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u_k \geqslant v_k$, donc en sommant ces inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \leftarrow \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } n \to +\infty$$

   Donc par minoration, $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

□

Remarque. *Ces théorèmes restent vrais dans le cas où l'hypothèse de comparaison $u_n \leqslant v_n$ (ou $u_n \geqslant v_n$) n'est vraie qu'à partir d'un certain rang p. En effet, pour tout $n \geqslant p$:*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{p-1} u_k}_{constante} + \sum_{k=p}^{n} u_k$$

et l'ajout ou le retrait d'une constante ne change rien à la convergence/divergence d'une suite.

Théorèmes (de comparaison asymptotique)**.** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries* ***à termes positifs****.*

1. ***Si*** $\begin{cases} u_n = \mathcal{O}(v_n) \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$ ***alors*** $\sum u_n$ *converge.*
   NB : ce théorème est aussi vrai si $u_n = o(v_n)$ car cela implique $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

2. ***Si*** $u_n \sim v_n$, ***alors*** *on a l'équivalence* $(\sum u_n \text{ converge}) \iff (\sum v_n \text{ converge})$.

Démonstration.

1. La relation $u_n = \mathcal{O}(v_n) = v_n \times \underbrace{\mathcal{O}(1)}_{\text{borné}}$ signifie :

$$\exists M \geqslant 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.v_n$$

   Or, la série $\sum M v_n$ converge, donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ **et** $v_n = \mathcal{O}(u_n)$.
   On peut donc appliquer le théorème précédent pour montrer ($\Leftarrow$) et ($\Rightarrow$).

□

Remarques.

1. ⚠ *Les théorèmes de comparaison s'appliquent aux séries à* ***termes positifs****. On en déduit toutefois des théorèmes symétriques pour les séries dont tous les termes sont négatifs (au moins à partir d'un certain rang), puisque :*

$$\sum_{k=0}^{n} (-u_k) = -\sum_{k=0}^{n} u_k$$

2. *L'immense intérêt des théorèmes de comparaison est qu'ils permettent de déterminer la nature d'une série (convergence ou divergence)* ***sans regarder aucune somme****. Leurs hypothèses ne concernent que le* ***terme général*** *des séries.*

Cf exo 3

4 Convergence absolue

4.1 Un mot introductif sur les séries à termes de signe variable

Soit u une suite réelle. Si l'on ne suppose plus que les u_n sont positifs, on perd le fait que les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} u_k$ sont croissantes, et tous les résultats de la partie précédente sont inutilisables. En revanche, on peut toujours écrire le terme général u_n sous la forme :

$$u_n = s_n \times |u_n| \qquad \text{où } s_n \in \{-1, 1\} \text{ est le signe de } u_n.$$

A l'inverse des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} u_k$, les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} |u_k|$ sont bien croissantes (série à termes positifs), et donc plus simples à analyser. On va essayer de faire un lien entre la convergence de $\sum |u_n|$ et celle de $\sum u_n$.

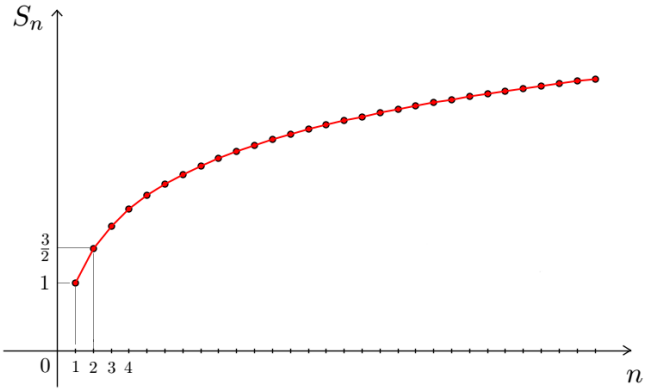
▶ Exemple 1 : si $|u_n| = \frac{1}{n}$

On sait que :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et

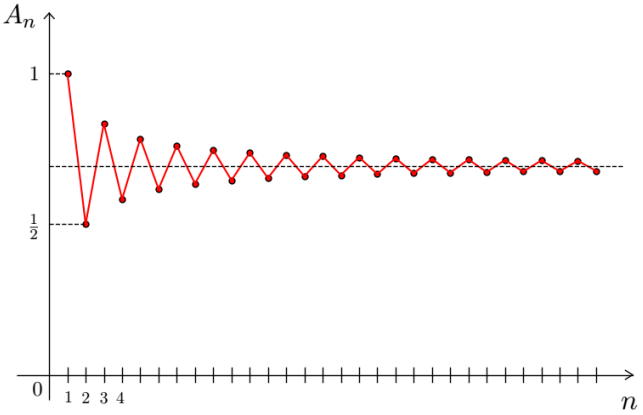
$$S_n \sim \ln(n)$$



Mais en alternant les signes, la somme partielle :

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge lorsque $n \to +\infty$.
La raison est une compensation fine entre termes positifs et termes négatifs.



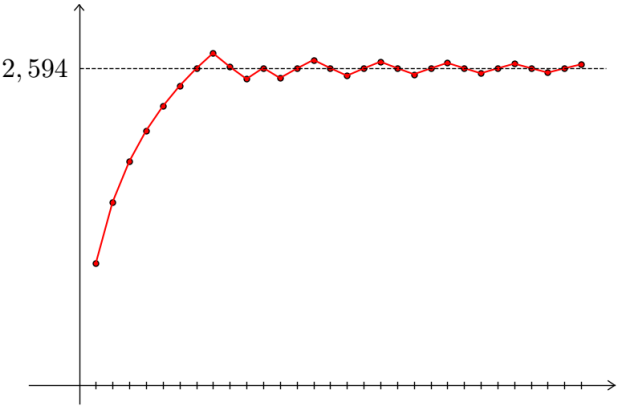
En prenant 2 termes positifs, puis un négatif, et ainsi de suite :

$$B_n := 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{s_n}{n}$$

On a $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

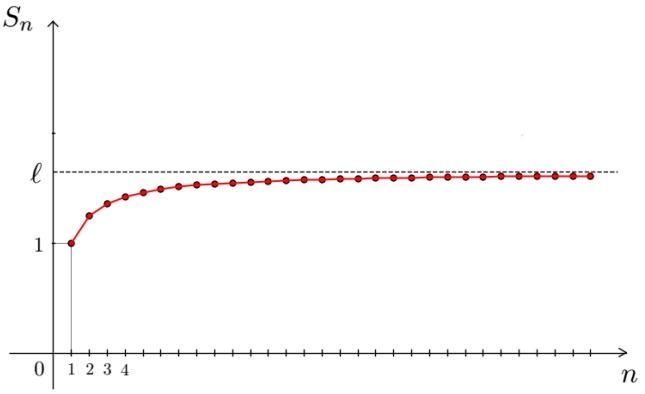
De manière générale, une somme partielle du type $\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k}$, où les $s_k \in \{-1, 1\}$, peut avoir, selon la façon dont on choisit les s_k, tous les comportements possibles (tendre vers n'importe quelle limite, finie ou infinie, ou même n'avoir aucune limite).

Exemple : tendre vers $2,594$.



▶ **Exemple 2 : si $|u_n| = \frac{1}{n^2}$**

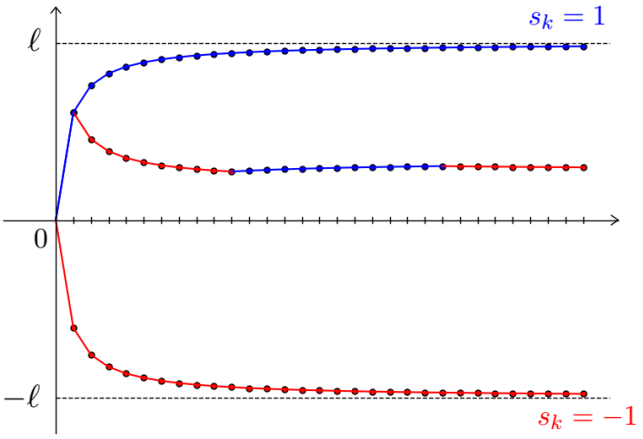
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$$



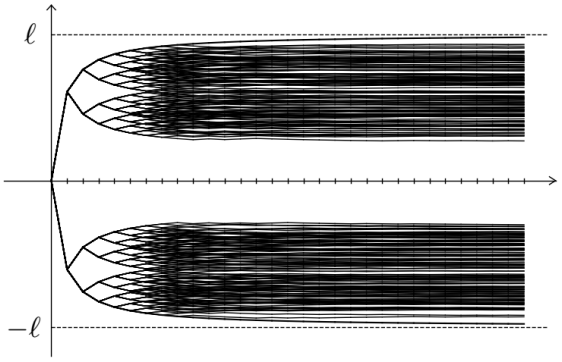
N'importe quelle somme du type

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^2} \qquad \text{où les } s_k \in \{-1, 1\}$$

va converger lorsque $n \to +\infty$, vers une limite comprise entre ℓ et $-\ell$.



En jouant sur les s_k pour obtenir plusieurs trajectoires possibles, on obtient ceci :



Conjecture

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Si $\sum |u_n|$ diverge vers $+\infty$, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$. Elle peut diverger (bien évidemment), mais aussi converger, pour des raisons de compensation fine entre termes positifs et termes négatifs.
- En revanche, si $\sum |u_n|$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$, alors là, pas le choix, $\sum u_n$ convergera vers une limite comprise entre $-\ell$ et ℓ.

La suite s'applique à démontrer le deuxième point, celui pour lequel on peut prouver une généralité.

4.2 Approche rigoureuse

Définition. *On dit qu'une série $\sum u_n$ (où $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, voire $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est* ***absolument convergente*** *lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.*

Remarque. *$\sum |u_n|$ est une série à termes positifs, donc soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. De plus, on peut lui appliquer les théorèmes de la partie précédente, ce qui est bien pratique.*

Théorème (cv abs $\Rightarrow$ cv)**.**
Si *$\sum u_n$ est absolument convergente,* ***alors*** *elle est convergente.*

Démonstration.

▶ **1er cas : si u est à valeurs réelles**

Supposons que la série $\sum |u_n|$ converge. Idée : séparer dans la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ les termes positifs et les termes négatifs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \underbrace{u_0}_{\geqslant 0} + \underbrace{u_1}_{<0} + \underbrace{u_2}_{<0} + \underbrace{u_3}_{\geqslant 0} + \underbrace{u_4}_{<0} + \cdots + \underbrace{u_{n-1}}_{<0} + \underbrace{u_n}_{\geqslant 0} \\
&= u_0 + 0 + 0 + u_3 + 0 + \cdots + 0 + u_n \\
&\quad + 0 + u_1 + u_2 + 0 + u_4 + \cdots + u_{n-1} + 0 \\
&= \big(u_0 + 0 + 0 + u_3 + 0 + \cdots + 0 + u_n\big) \\
&\quad - \big(0 + (-u_1) + (-u_2) + 0 + (-u_4) + \cdots + (-u_{n-1}) + 0\big)
\end{aligned}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n^+ := \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad u_n^- := \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ -u_n & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

Par construction, les u_n^+ et les u_n^- sont positifs, et on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k^-$$

Or, on a d'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_n^+ \leqslant |u_n| \\ u_n^- \leqslant |u_n| \end{cases}$, et $|u_n|$ est le terme général d'une série convergente, par hypothèse. Donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.
Donc par somme, $\sum u_n$ est convergente.

▶ **2ème cas : si u est à valeurs complexes**

Supposons que la série $\sum |u_n|$ converge (ici, il s'agit de la somme des **modules** de u_n). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Re}(u_k) + i\,\mathrm{Im}(u_k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(u_k) + i \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(u_k)
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \\ |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n| \end{cases}$, car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\begin{cases} |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \\ |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \end{cases}$.
On peut donc appliquer le 1er cas à $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$.

□

Remarque. *Une technique classique pour montrer la convergence d'une série $\sum u_n$ est d'estimer $|u_n|$, typiquement montrer :*

$$|u_n| \leqslant v_n \qquad ou \qquad |u_n| = \mathcal{O}(v_n) \qquad ou \qquad |u_n| \sim v_n$$

pour une quantité v_n positive telle que $\sum v_n$ converge, pour enchaîner les arguments :

- *par théorème de comparaison (asymptotique ou non) sur les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge ;*
- *$\sum u_n$ est absolument convergente, **donc convergente**.*

Cf exo 4

Proposition. *Si $\sum u_n$ est absolument convergente (et donc convergente), alors sa somme vérifie l'inégalité :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Autrement dit, si $\ell := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, la limite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ appartient à $[-\ell, \ell]$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a par inégalité triangulaire classique (sur les sommes finies) :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Il suffit alors de procéder à un passage à la limite $n \to +\infty$ dans cette inégalité large. □

Remarque. ⚠ *La convergence absolue ne concerne pas les quantités du type $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|$.*

Elle concerne la convergence lorsque $n \to +\infty$ de $\sum_{k=0}^{n} |u_k|$, ce qui n'a rien à voir.

Vocabulaire. *Lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels ou de complexes est telle que la série $\sum |u_n|$ converge, on dit que cette suite est **sommable**.*

On peut montrer (programme de MPSI) que dans cette situation, non seulement la série $\sum u_n$ converge (vers une valeur ℓ), mais si on somme les u_n dans un autre ordre que l'ordre naturel, la série converge, également vers ℓ. Autrement dit, pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

A l'inverse, si $\sum u_n$ converge, mais pas $\sum |u_n|$, on peut, en changeant l'ordre de sommation, faire tendre $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$ vers n'importe limite, finie ou infinie. On parle parfois de série "semi-convergente".

5 Epilogue culturel : développement décimal d'un réel

Un développement décimal du type $2,5478126\ldots$, éventuellement infini, exprime la convergence d'une série :

$$\begin{aligned} 2,5478\ldots &= 2+\frac{5}{10^1}+\frac{4}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{8}{10^3}+\cdots \\ &= 2+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{10^k} \quad , \quad \text{où les } a_k \in [\![0,9]\!]. \end{aligned}$$

Théorème.

1. *Pour toute suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ d'entiers de $[\![0,9]\!]$, la série $\sum \frac{a_k}{10^k}$ est convergente.*

   Démonstration. Facile : les termes sont positifs, et $\frac{a_k}{10^k} \leqslant \frac{9}{10^k}$, qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{10}$. □

2. *Tout réel x se décompose de façon "presque unique" sous la forme :*

$$x = p+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k}{10^k} \qquad \text{où} \quad \begin{cases} p\in\mathbb{Z} \ \textit{(en fait } p=\lfloor x\rfloor\textit{)} \\ (a_k)_{k\geqslant 1}\in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*} \end{cases}$$

   Démonstration. Admise, et hors programme, et de toute façon, l'énoncé n'est pas rigoureux. □